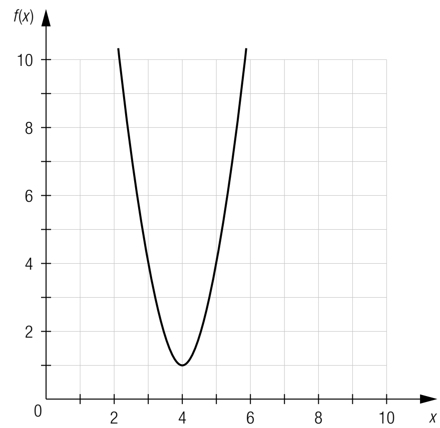
Page 159

10. $f(x)$, $h(x)$, $j(x)$

11.



Réponse : Oui, Gary a raison. La représentation graphique de cette fonction montre qu'elle ne possède pas de zéro. Or, la forme factorisée n'est possible que s'il existe au moins un zéro.

12. Il est possible de déterminer la règle de cette fonction sous la forme factorisée :

Soit $f(x)$, l'altitude du pélican (en m) et x, le temps écoulé (en s).

$x_1 = 2$ et $x_2 = 4$
$f(x) = a(x - 2)(x - 4)$
$2{,}4 = a(0 - 2)(0 - 4)$
$2{,}4 = 8a$
$0{,}3 = a$

La règle est : $f(x) = 0{,}3(x - 2)(x - 4)$

La profondeur maximale correspond au paramètre k. Le sommet se trouve sur l'axe de symétrie dont la règle est $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2 + 4}{2} = 3$.

$f(3) = 0{,}3(3 - 2)(3 - 4)$
$= {}^{-}0{,}3$ m

Réponse : La profondeur maximale atteinte par le pélican est de 0,3 m.

Page 160

13. Soit $f(x)$, la valeur de l'action (en $) et x, le temps écoulé (en mois). Le maximum correspond au sommet (h, k), soit (5, 6,5). La règle de cette fonction sous la forme canonique est :

$f(x) = a(x - 5)^2 + 6{,}5$
$5{,}7 = a(3 - 5)^2 + 6{,}5$
$5{,}7 = 4a + 6{,}5$
${}^{-}0{,}2 = a$

Donc, $f(x) = {}^{-}0{,}2(x - 5)^2 + 6{,}5$

On cherche la valeur de l'action pour $x = 0$ et $x = 6$:

$f(0) = {}^{-}0{,}2(0 - 5)^2 + 6{,}5$
$= 1{,}50$ $
$f(6) = {}^{-}0{,}2(6 - 5)^2 + 6{,}5$
$= 6{,}30$ $

Réponse : La valeur de l'action au début de l'année était de 1,50 $ et au début du 6e mois, de 6,30 $.

14. Soit $f(x)$, la hauteur de la balle (en m) et x, le temps écoulé (en s).
$x_1 = 0$ et $x_2 = 7$

La règle de cette fonction sous la forme factorisée est :

$f(x) = ax(x - 7)$
$1{,}5 = 2a(2 - 7)$
$1{,}5 = {}^{-}10a$
${}^{-}0{,}15 = a$

Donc, $f(x) = {}^{-}0{,}15x(x - 7)$

La hauteur maximale correspond au sommet de la parabole. Le sommet se trouve sur l'axe de symétrie dont la règle est $x = 3{,}5$, car $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0 + 7}{2} = 3{,}5$.

$f(3{,}5) = {}^{-}0{,}15 \times 3{,}5(3{,}5 - 7)$
$= 1{,}8375$ m

Réponse : La hauteur maximale atteinte par la balle est de 1,8375 m.

15. Soit $f(x)$, la hauteur de l'eau (en m) et x, le temps écoulé (en min). La règle de cette fonction sous la forme canonique est :

$f(x) = a(x - 7{,}5)^2 + 4{,}5$
$4 = a(5 - 7{,}5)^2 + 4{,}5$
$4 = 6{,}25a + 4{,}5$
${}^{-}0{,}08 = a$

Donc, $f(x) = {}^{-}0{,}08(x - 7{,}5)^2 + 4{,}5$

On détermine la forme factorisée en développant et en factorisant cette règle.

$f(x) = {}^{-}0{,}08(x - 7{,}5)^2 + 4{,}5$
$= {}^{-}0{,}08x^2 + 1{,}2x$
$= {}^{-}0{,}08x(x - 15)$

Réponse : Sous la forme factorisée, la règle de la fonction est $f(x) = {}^{-}0{,}08x(x - 15)$.

SECTION 4.3 Résolution d'une équation du second degré à une ou à deux variables

Page 162

1. **a)** $(x + 7)(x + 2) = 0$
$x_1 + 7 = 0$ $\quad$ $x_2 + 2 = 0$
$x_1 = {}^{-}7$ $\quad$ $x_2 = {}^{-}2$

b) $x^2 - 4x - 32 = 0$
$(x + 4)(x - 8) = 0$
$x_1 + 4 = 0$ $\quad$ $x_2 - 8 = 0$
$x_1 = {}^{-}4$ $\quad$ $x_2 = 8$

c) ${}^{-}2x^2 + 20x - 50 = 0$
${}^{-}2(x^2 - 10x + 25) = 0$
${}^{-}2(x - 5)^2 = 0$
$x - 5 = 0$
$x = 5$

d) $3x^2 + 36x = 0$
$3x(x + 12) = 0$
$3x_1 = 0$ $\quad$ $x_2 + 12 = 0$
$x_1 = 0$ $\quad$ $x_2 = {}^{-}12$

e) $2x^2 + 8 = 0$
$2(x^2 + 4) = 0$
$x^2 + 4 = 0$
$x^2 = {}^{-}4$
$\varnothing$

f) $8x^2 + 26x + 15 = 0$
$(2x + 5)(4x + 3) = 0$
$2x_1 + 5 = 0$ $\quad$ $4x_2 + 3 = 0$
$x_1 = -\frac{5}{2}$ $\quad$ $x_2 = -\frac{3}{4}$

g)
$$\begin{aligned} 4x^2 - 36 &= 0 \\ 4(x^2 - 9) &= 0 \\ 4(x + 3)(x - 3) &= 0 \end{aligned}$$
$x_1 + 3 = 0 \qquad x_2 - 3 = 0$
$x_1 = -3 \qquad x_2 = 3$

h)
$$\begin{aligned} -3x^2 - 42x - 147 &= 0 \\ -3(x^2 + 14x + 49) &= 0 \\ -3(x + 7)^2 &= 0 \end{aligned}$$
$x + 7 = 0$
$x = -7$

i)
$$\begin{aligned} 12x^2 - 60x + 75 &= 0 \\ 3(4x^2 - 20x + 25) &= 0 \\ 3(2x - 5)^2 &= 0 \end{aligned}$$
$2x - 5 = 0$
$x = \frac{5}{2}$

Page 163

2. a) $x = \dfrac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4(1)(30)}}{2(1)}$
$x_1 = 5,\ x_2 = 6$

b) $2x^2 - 2x - 112 = 0$
$x = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(2)(-112)}}{2(2)}$
$x_1 = 8,\ x_2 = -7$

c) $x^2 + 150x + 5000 = 0$
$x = \dfrac{-150 \pm \sqrt{150^2 - 4(1)(5000)}}{2(1)}$
$x_1 = -50,\ x_2 = -100$

d) $3x^2 - 132x + 1452 = 0$
$x = \dfrac{-(-132) \pm \sqrt{(-132)^2 - 4(3)(1452)}}{2(3)}$
$x = 22$

e) $3x^2 + 9x + 5 = 0$
$x = \dfrac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4(3)(5)}}{2(3)}$
$x_1 \approx -0{,}74,\ x_2 \approx -2{,}26$

f) $-2x^2 + 5x + 1 = 0$
$x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(-2)(1)}}{2(-2)}$
$x_1 \approx -0{,}19,\ x_2 \approx 2{,}69$

g) $400x^2 - 729 = 0$
$x = \dfrac{\pm\sqrt{0^2 - 4(400)(-729)}}{2(400)}$
$x_1 = 1{,}35,\ x_2 = -1{,}35$

h) $14x^2 + 22x + 3 = 0$
$x = \dfrac{-22 \pm \sqrt{22^2 - 4(14)(3)}}{2(14)}$
$x_1 \approx -0{,}15,\ x_2 \approx -1{,}42$

i) $20x^2 + 8x + 14 = 0$
$x = \dfrac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4(20)(14)}}{2(20)}$
$\varnothing$

3. a) $(x + 3)^2 = 81$
$x + 3 = \pm 9$
$x_1 = -3 - 9 \qquad x_2 = -3 + 9$
$= -12 \qquad = 6$

b) $(x - 14)^2 = 36$
$x - 14 = \pm 6$
$x_1 = 14 - 6 \qquad x_2 = 14 + 6$
$= 8 \qquad = 20$

c) $(x + 4)^2 = 1{,}5$
$x + 4 \approx \pm 1{,}22$
$x_1 \approx -4 + 1{,}22 \qquad x_2 \approx -4 - 1{,}22$
$\approx -2{,}78 \qquad \approx -5{,}22$

d) $(x - 12)^2 = 20$
$x - 12 \approx \pm 4{,}47$
$x_1 \approx 12 + 4{,}47 \qquad x_2 \approx 12 - 4{,}47$
$\approx 16{,}47 \qquad \approx 7{,}53$

e) $(x - 12)^2 = 0$
$x - 12 = 0$
$x = 12$

f) $x^2 = 16$
$x = \pm 4$
$x_1 = 4 \qquad x_2 = -4$

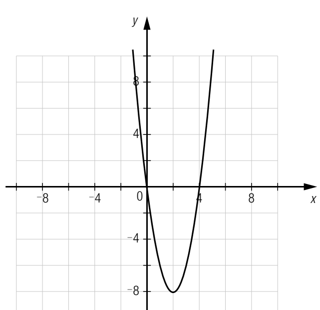
g) $(x - 4)^2 = -2$
$\varnothing$

h) $(x - 1{,}2)^2 = 1{,}44$
$x - 1{,}2 = \pm 1{,}2$
$x_1 = 1{,}2 - 1{,}2 \qquad x_2 = 1{,}2 + 1{,}2$
$= 0 \qquad = 2{,}4$

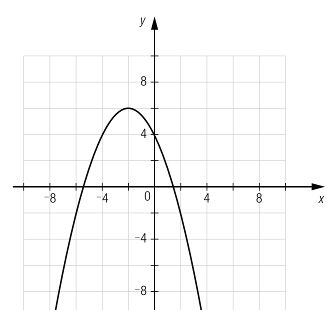
i) $(x - 20)^2 = 450$
$x - 20 \approx \pm 21{,}21$
$x_1 \approx 20 - 21{,}21 \qquad x_2 \approx 20 + 21{,}21$
$\approx -1{,}21 \qquad \approx 41{,}21$

Page 164

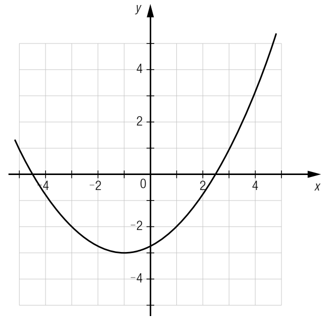
4. a)
$$\begin{aligned} 3y + 24x &= 6x^2 \\ 3y &= 6x^2 - 24x \\ y &= 2x^2 - 8x \end{aligned}$$



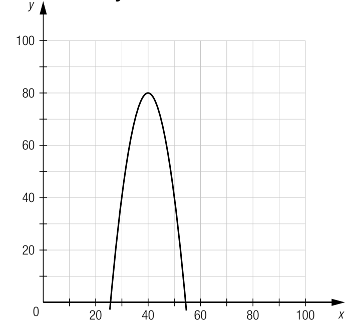
b)
$$\begin{aligned} 2y + x^2 &= 8 - 4x \\ 2y &= -x^2 - 4x + 8 \\ y &= -0{,}5x^2 - 2x + 4 \end{aligned}$$



c)
$$\begin{aligned} 2x^2 - 8y + 4x - 22 &= 0 \\ -8y &= -2x^2 - 4x + 22 \\ y &= 0{,}25x^2 + 0{,}5x - 2{,}75 \end{aligned}$$



d)
$$\begin{aligned} 6{,}4x - 112 &= 0{,}08x^2 + 0{,}2y \\ -0{,}2y &= 0{,}08x^2 - 6{,}4x + 112 \\ y &= -0{,}4x^2 + 32x - 560 \end{aligned}$$



Page 165

5. a) $12 = 2x^2 - 24x + 76$
$0 = 2x^2 - 24x + 64$
$x = \frac{-(-24) \pm \sqrt{(-24)^2 - 4(2)(64)}}{2(2)}$
$x_1 = 4, x_2 = 8$

b) $^-10 = 2x^2 - 24x + 76$
$0 = 2x^2 - 24x + 86$
$x = \frac{-(-24) \pm \sqrt{(-24)^2 - 4(2)(86)}}{2(2)}$
$\varnothing$

c) $4 = 2x^2 - 24x + 76$
$0 = 2x^2 - 24x + 72$
$x = \frac{-(-24) \pm \sqrt{(-24)^2 - 4(2)(72)}}{2(2)}$
$x = 6$

6. a) $0 = {}^-0{,}5(x - 10)^2 + 18$
$36 = (x - 10)^2$
$^\pm\sqrt{36} = x - 10$
$^\pm 6 = x - 10$
$x_1 = {}^-6 + 10 = 4$ $\quad x_2 = 6 + 10 = 16$

b) $16 = {}^-0{,}5(x - 10)^2 + 18$
$4 = (x - 10)^2$
$^\pm\sqrt{4} = x - 10$
$^\pm 2 = x - 10$
$x_1 = {}^-2 + 10 = 8$ $\quad x_2 = 2 + 10 = 12$

c) $25 = {}^-0{,}5(x - 10)^2 + 18$
$^-14 = (x - 10)^2$
$\varnothing$

7. a) $24 = {}^-0{,}12(t - 15)^2 + 27$
$(t - 15)^2 = 25$
$t - 15 = {}^\pm\sqrt{25}$
$t - 15 = {}^\pm 5$
$t_1 = 15 - 5 = 10$ s $\quad t_2 = 15 + 5 = 20$ s

Réponse : La cabine se trouve à 24 m de hauteur 10 s et 20 s après la mise en route.

b) On cherche t lorsque $h(t) = 10$, donc $10 = {}^-0{,}12(t - 15)^2 + 27$.
On obtient $(t - 15)^2 \approx 141{,}67$, donc $t_1 \approx 3{,}1$ s et $t_2 \approx 26{,}9$ s.

Réponse : La cabine se trouve à 10 m de hauteur environ 3,1 s et 26,9 s après la mise en route.

c) On cherche t lorsque $h(t) = 27$, donc $27 = {}^-0{,}12(t - 15)^2 + 27$.
On obtient $(t - 15)^2 = 0$, donc $t = 15$ s.

Réponse : La cabine se trouve à 27 m de hauteur 15 s après la mise en route.

Page 166

8. a) $1 = {}^-0{,}08t^2 + 2{,}08t + 1$
$0 = {}^-0{,}08t^2 + 2{,}08t$
$t_1 = 0$ s, $t_2 = 26$ s

Réponse : La balle se trouve à 1 m de hauteur au moment où elle est frappée (0 s) et 26 s après avoir été frappée.

b) $14{,}52 = {}^-0{,}08t^2 + 2{,}08t + 1$
$0 = {}^-0{,}08t^2 + 2{,}08t - 13{,}52$
$t = 13$ s

Réponse : La balle se trouve à 14,52 m de hauteur 13 s après avoir été frappée. Cette hauteur correspond à la hauteur maximale atteinte par la balle.

c) $0 = {}^-0{,}08t^2 + 2{,}08t + 1$
$t_1 \approx {}^-0{,}47$ s (à rejeter), $t_2 \approx 26{,}47$ s

Réponse : La balle touche le sol environ 26,47 s après avoir été frappée.

9. a) La règle est $n(t) = 20(t - 5)^2 + 200$.

b) $300 = 20(t - 5)^2 + 200$
$(t - 5)^2 = 5$
$t_1 \approx 2{,}76$ mois, $t_2 \approx 7{,}24$ mois

Réponse : 300 personnes sont infectées environ 2,76 mois et environ 7,24 mois après le début de l'année.

c) $920 = 20(t - 5)^2 + 200$
$(t - 5)^2 = 36$
$t_1 = {}^-1$ mois (à rejeter), $t_2 = 11$ mois

Réponse : 920 personnes sont infectées 11 mois après le début de l'année.

Page 167

10. a) La règle est $r(q) = {}^-0{,}0008(q - 200)(q - 900)$.

b) $60 = {}^-0{,}0008(q - 200)(q - 900)$
$0 = {}^-0{,}0008q^2 + 0{,}88q - 204$
$q_1 \approx 332{,}06$ kg, $q_2 \approx 767{,}94$ kg

Réponse : La quantité d'engrais nécessaire est d'environ 332,06 kg ou d'environ 767,94 kg.

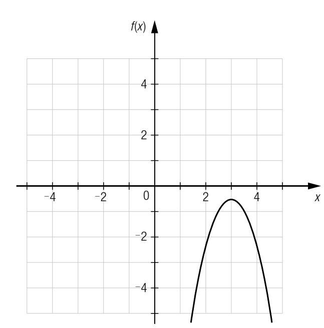
c) $98 = {}^-0{,}0008(q - 200)(q - 900)$
$0 = {}^-0{,}0008q^2 + 0{,}88q - 242$
$q = 550$ kg

Réponse : La quantité d'engrais nécessaire est 550 kg.

d) À la quantité d'engrais nécessaire pour obtenir un rendement maximal.

11. Le graphique ci-contre est celui d'une fonction où $a < 0$, $h > 0$ et $k < 0$.
On remarque que la courbe ne coupe pas l'axe des abscisses. Il n'y a donc pas de zéro.

Réponse : Lorsque la règle d'une fonction est de la forme $f(x) = a(x - h)^2 + k$ et que $a < 0$, $h > 0$ et $k < 0$, la fonction n'a aucun zéro.



Page 168

12. a) $0 = 0{,}4t^2 - 2{,}4t + 2$
$t_1 = 1$ mois, $t_2 = 5$ mois
Réponse : Le propriétaire ne fait aucun profit au 1er et au 5e mois.

b) $-1{,}2 = 0{,}4t^2 - 2{,}4t + 2$
$0 = 0{,}4t^2 - 2{,}4t + 3{,}2$
$t_1 = 2$ mois, $t_2 = 4$ mois
Réponse : Le propriétaire fait un déficit de 1200 \$ au 2e et au 4e mois.

c) $18 = 0{,}4t^2 - 2{,}4t + 2$
$0 = 0{,}4t^2 - 2{,}4t - 16$
$t_1 = -4$ mois (à rejeter), $t_2 = 10$ mois
Réponse : Le propriétaire fait un profit de 18 000 \$ au 10e mois.

13. a) $7 = 0{,}035(t - 15)^2 - 0{,}875$
$(t - 15)^2 = 225$
$t_1 = 0$ s, $t_2 = 30$ s (à rejeter)
Réponse : L'automobile se trouve à 7 m de l'obstacle à 0 s.

b) $1 = 0{,}035(t - 15)^2 - 0{,}875$
$(t - 15)^2 \approx 53{,}57$
$t_1 \approx 7{,}68$ s, $t_2 \approx 22{,}32$ s (à rejeter)
Réponse : L'automobile se trouve à 1 m de l'obstacle à environ 7,68 s.

c) $0 = 0{,}035(t - 15)^2 - 0{,}875$
$(t - 15)^2 = 25$
$t_1 = 10$ s, $t_2 = 20$ s (à rejeter)
Réponse : La durée du freinage est de 10 s.

SECTION 4.4 Résolution d'une inéquation du second degré à une variable

Page 169

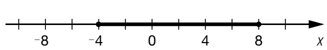
1. Soit l'inéquation $-3x^2 + 24x + 20 > 65$.
$-3x^2 + 24x + 20 = 65$
$-3x^2 + 24x - 45 = 0$
$$x = \frac{-24 \pm \sqrt{24^2 - 4(-3)(-45)}}{2(-3)}$$
$x_1 = 3$ et $x_2 = 5$
La solution de l'inéquation est $x \in \,]3, 5[$.

Soit l'inéquation $3x^2 - 24x - 20 > -65$.
$3x^2 - 24x - 20 = -65$
$3x^2 - 24x + 45 = 0$
$$x = \frac{-(-24) \pm \sqrt{(-24)^2 - 4(3)(45)}}{2(3)}$$
$x_1 = 3$ et $x_2 = 5$
La solution de l'inéquation est $x \in \,]-\infty, 3[\cup]5, +\infty[$.

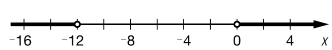
Réponse : Les deux ensembles-solutions sont différents, donc Louka a tort.

Page 170

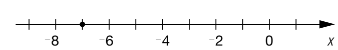
2. a) $2x^2 - 8x - 64 \leq 0$
$2x^2 - 8x - 64 = 0$
$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(2)(-64)}}{2(2)}$$
$x_1 = -4 \qquad x_2 = 8$
$x \in [-4, 8]$



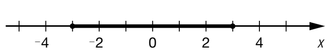
b) $4{,}5x^2 + 54x > 0$
$4{,}5x(x + 12) = 0$
$4{,}5x_1 = 0 \qquad x_2 + 12 = 0$
$x_1 = 0 \qquad x_2 = -12$
$x \in \,]-\infty, -12[\cup]0, +\infty[$



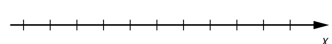
c) $x^2 + 14x + 49 \leq 0$
$x^2 + 14x + 49 = 0$
$(x + 7)^2 = 0$
$x + 7 = 0$
$x = -7$



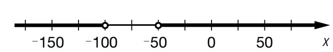
d) $-2x^2 + 18 \geq 0$
$-2x^2 + 18 = 0$
$-2(x^2 - 9) = 0$
$-2(x + 3)(x - 3) = 0$
$x_1 + 3 = 0 \qquad x_2 - 3 = 0$
$x_1 = -3 \qquad x_2 = 3$
$x \in [-3, 3]$



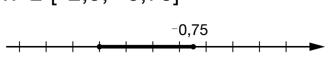
e) $10x^2 + 4x + 7 \leq 0$
$10x^2 + 4x + 7 = 0$
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(10)(7)}}{2(10)}$$
$x \in \varnothing$



f) $0{,}5x^2 + 75x + 2500 > 0$
$0{,}5x^2 + 75x + 2500 = 0$
$$x = \frac{-75 \pm \sqrt{75^2 - 4(0{,}5)(2500)}}{2(0{,}5)}$$
$x_1 = -100 \qquad x_2 = -50$
$x \in \,]-\infty, -100[\cup]-50, +\infty[$



g) $0 \leq -4x^2 - 13x - 7{,}5$
$-4x^2 - 13x - 7{,}5 \geq 0$
$-4x^2 - 13x - 7{,}5 = 0$
$$x = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4(-4)(-7{,}5)}}{2(-4)}$$
$x_1 = -2{,}5 \qquad x_2 = -0{,}75$
$x \in [-2{,}5, -0{,}75]$



h) $0 \leq 3x^2 - 132x + 1452$
$3x^2 - 132x + 1452 \geq 0$
$3x^2 - 132x + 1452 = 0$
$$x = \frac{-(-132) \pm \sqrt{(-132)^2 - 4(3)(1452)}}{2(3)}$$
$x = 22$
$x \in \mathbb{R}$

Page 171

3. a) $-0{,}2x^2 + 1{,}6x \leq 0$
$-0{,}2x^2 + 1{,}6x = 0$
$-0{,}2x(x - 8) = 0$
$-0{,}2x_1 = 0 \qquad x_2 - 8 = 0$
$x_1 = 0 \qquad x_2 = 8$
$x \in \,]-\infty, 0] \cup [8, +\infty[$

b) $3x^2 + 12x + 12 \leq 0$
$3x^2 + 12x + 12 = 0$
$3(x^2 + 4x + 4) = 0$
$3(x + 2)^2 = 0$
$x + 2 = 0$
$x = -2$
$x = -2$

c) $4x^2 + 24x - 160 \leq 0$
$4x^2 + 24x - 160 = 0$
$4(x^2 + 6x - 40) = 0$
$4(x - 4)(x + 10) = 0$
$x_1 - 4 = 0 \qquad x_2 + 10 = 0$
$x_1 = 4 \qquad x_2 = -10$
$x \in [-10, 4]$

d) $5x^2 + 500x - 100\,000 > 0$
$5x^2 + 500x - 100\,000 = 0$
$5(x^2 + 100x - 20\,000) = 0$
$5(x + 200)(x - 100) = 0$
$x_1 + 200 = 0 \qquad x_2 - 100 = 0$
$x_1 = -200 \qquad x_2 = 100$
$x \in \,]-\infty, -200[\cup]100, +\infty[$